

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2021-2022

Prova scritta in aula del 24.03.2023

Parte II - Testo 1

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soliti fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità  $C$ ,  $M_C$ .

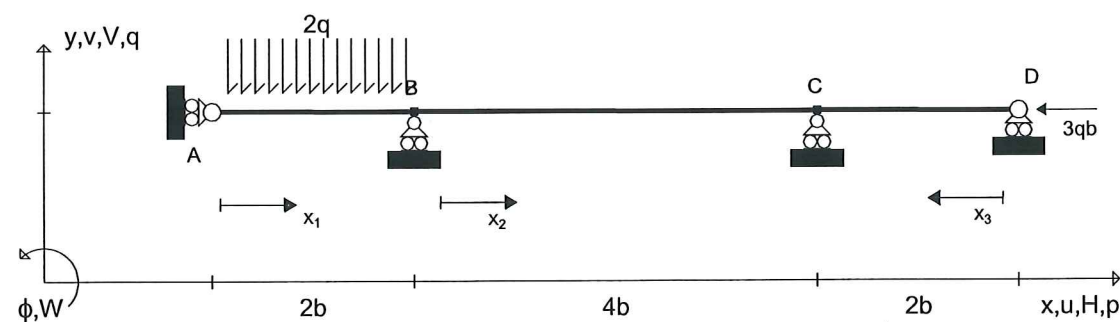
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, l'abbassamento del punto  $A$ ,  $v_A$

Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 24.03.23\*001



EQ. DI CONQUENTA:  $\Delta \phi_C = 0$

## Esercizio n. 2 (7 punti)

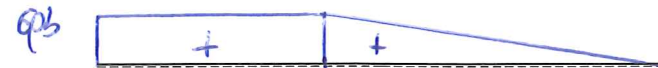
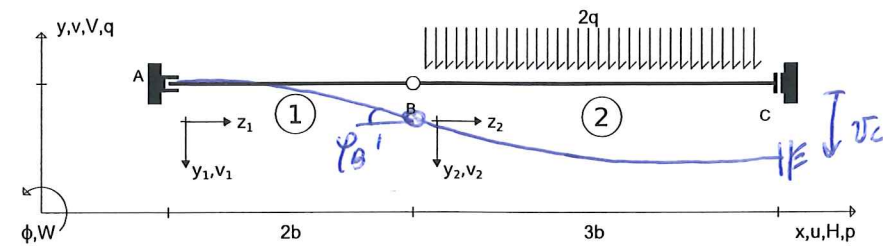
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

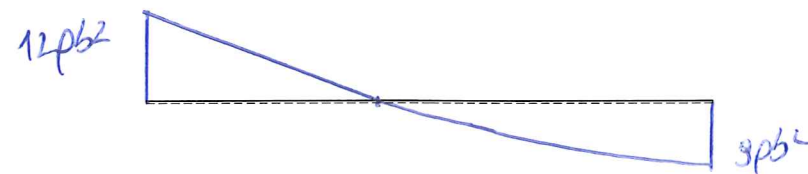
1. La deformata della linea d'asse,  $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$ ;
2. La sua derivata prima,  $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$ ;
3. La rotazione del punto  $B$  nella trave 1,  $\varphi_B^{(1)}$ ;
4. Lo spostamento verticale del punto  $C$ ,  $v_C$ .

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 24.03.23\*001



$\uparrow \boxed{+} \downarrow$



$\curvearrowright \boxed{+} \curvearrowleft$

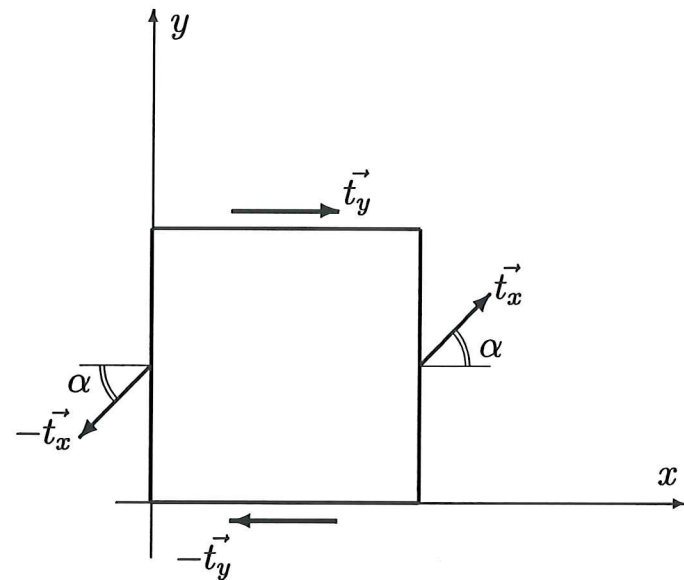
$$\begin{aligned}
 V_A (\uparrow) &= 6pb; & M_A (\mathcal{A}) &= 12pb^2; & H_C (\Rightarrow) &= 0; & M_C (\mathcal{A}) &= 9pb^2; \\
 N_{AB} &= 0; & T_{AB} &= 6pb; & M_{AB} &= -12pb^2 + 6pbz_1; \\
 N_{BC} &= 0; & T_{BC} &= 6pb - 2qz_2; & M_{BC} &= 6pbz_2 - qz_2^2; \\
 \text{c.c in } A &= v_1(z_1=0)=0, \quad v_1'(z_1=0)=0; & \text{c.c in } B &= v_1(z_1=2b)=v_2(z_2=0); \\
 & & \text{c.c in } C &= v_2'(z_2=3b)=0; \\
 v_1(z_1) &= \frac{1}{EI} (6pb^2z_1^2 - qb^3z_1^3); & v_1'(z_1) &= \frac{1}{EI} (12pb^2z_1 - 3qb^3z_1^2); \\
 v_2(z_2) &= \frac{1}{EI} (-qb^3z_2^3 + 12qpb^2z_2^2 + 18qb^3z_2 + 16pb^4); & v_2'(z_2) &= \frac{1}{EI} (-3qb^3z_2^2 + 24qpb^2z_2 + 18qb^3); \\
 v_C &= \frac{193pb^4}{4EI} (\downarrow); & \varphi_B^{(1)} &= \frac{12qb^3}{EI} (\downarrow);
 \end{aligned}$$

### Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi  $x$  e  $y$  ai vettori sforzo (piani)  $t_x$  e  $t_y$  rispettivamente; di questi  $t_x$  è inclinato rispetto all'asse  $x$  di un angolo  $\alpha = 45^\circ$  (sicché  $\sin \alpha = \sqrt{2}/2$ ;  $\cos \alpha = \sqrt{2}/2$ ) e ha modulo di valore  $|t_x| = 50$  MPa. L'altro vettore sforzo,  $t_y$ , è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , e la massima tensione tangenziale,  $\tau_{\max}$ .

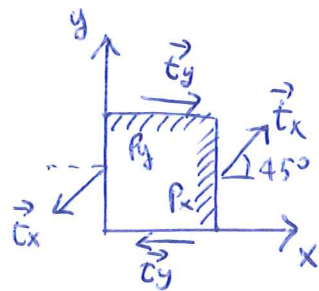
Determinare inoltre quanto vale l'angolo  $\varphi$  formato dall'asse  $x$  e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo,  $\sigma_1$ .



$$\sigma_x = 35,355 \text{ (MPa)}; \sigma_y = 0,000 \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = 35,355 \text{ (MPa)};$$

$$\sigma_1 = 57,206 \text{ (MPa)}; \sigma_2 = -21,850 \text{ (MPa)}; \tau_{\max} = 39,528 \text{ (MPa)};$$

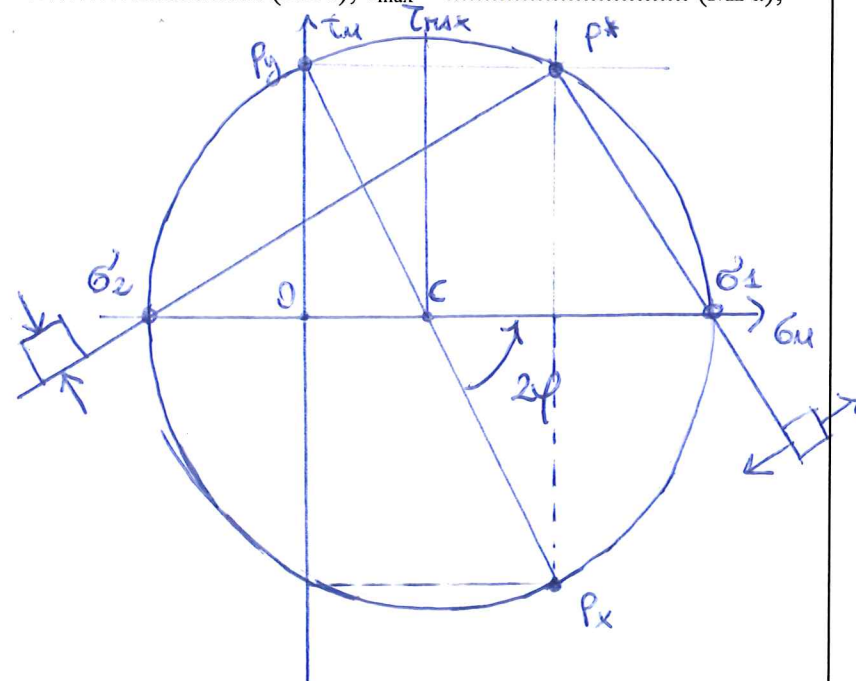
cerchio di Mohr:

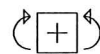
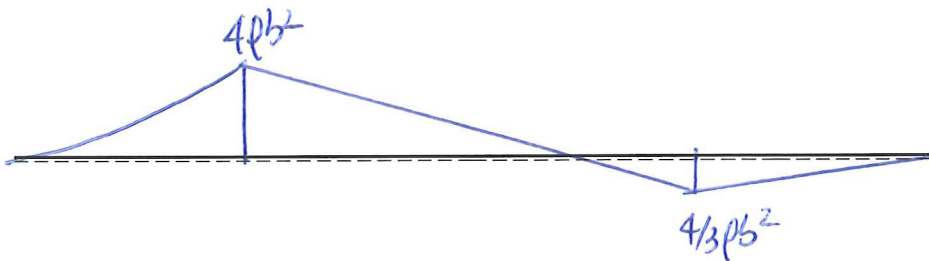
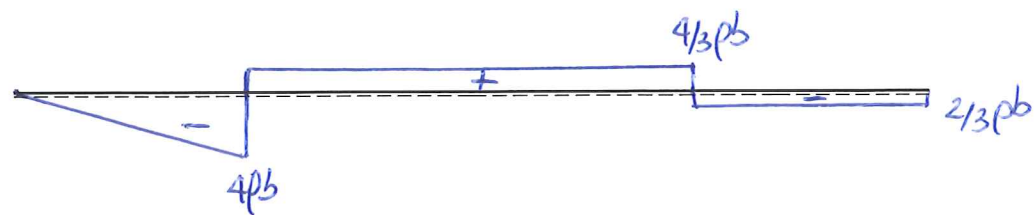
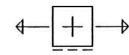


$$P_x = (35,355; -35,355)$$

$$P_y = (0,000; +35,355)$$

$$\varphi = 31,717 \text{ (}^\circ\text{)};$$





$$\begin{aligned}
 H_A (\Rightarrow) &= 3pb; & V_B (\uparrow) &= 16/3pb; & V_C (\uparrow) &= -2pb; & V_D (\uparrow) &= 2/3pb; & M_C (\curvearrowright) &= 4/3pb^2; \\
 N_{AB} &= -3pb; & T_{AB} &= -2qx_1; & M_{AB} &= -px_1^2; \\
 N_{BC} &= -3pb; & T_{BC} &= 4/3pb; & M_{BC} &= -4pb^2 + 4/3pbx_2; \\
 N_{DC} &= -3pb; & T_{DC} &= -2/3pb; & M_{DC} &= 2/3pbx_3; \\
 v_A &= -116qb^4/9EI;
 \end{aligned}$$



CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2021-2022

Prova scritta in aula del 24.03.2023

Parte II - Testo 2

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui solli fogli a quadretti che sono stati forniti.

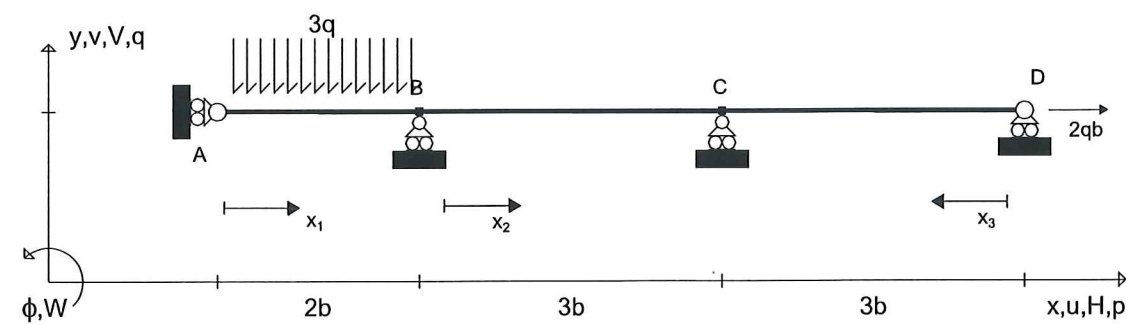
Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità  $C$ ,  $M_C$ . Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici. Calcolare infine, riapplicando il PLV, l'abbassamento del punto  $A$ ,  $v_A$ . Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 24.03.23\*002



Eq. di compatibilità:  $\Delta \phi = 0$

## Esercizio n. 2 (7 punti)

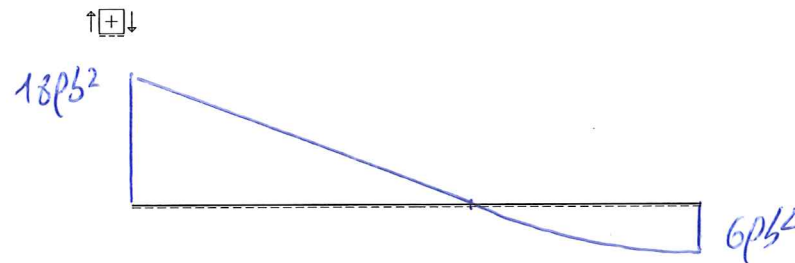
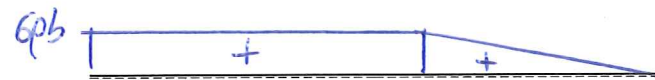
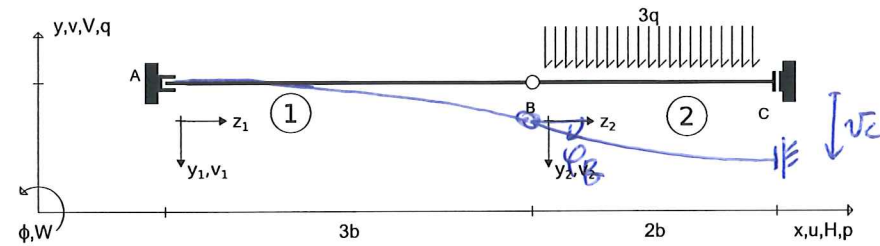
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

1. La deformata della linea d'asse,  $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$ ;
2. La sua derivata prima,  $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$ ;
3. La rotazione del punto  $B$  nella trave 2,  $\varphi_B^{(2)}$ ;
4. Lo spostamento verticale del punto  $C$ ,  $v_C$ .

Università di Cagliari

SdC\_SdA 24.03.23\*002



(+)

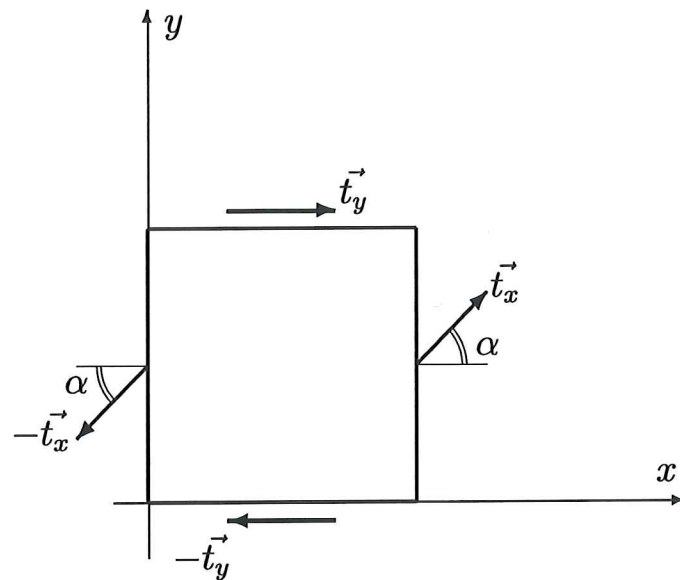
$$\begin{aligned}
 V_A (\uparrow) &= 6pb; & M_A (\mathcal{M}) &= 18pb^2; & H_C (\Rightarrow) &= 0; & M_C (\mathcal{M}) &= 6pb^2; \\
 N_{AB} &= //; & T_{AB} &= 6pb; & M_{AB} &= -18pb^2 + 6pbz_1; \\
 N_{BC} &= //; & T_{BC} &= 6pb - 3pz_2; & M_{BC} &= 6pbz_2 - \frac{3}{2}qz_2^2; \\
 \text{c.c in } A &= v_1(z_1=0)=0; \quad v_1'(z_1=0)=0; & \text{c.c in } B &= v_1(z_1=3b)=v_2(z_2=0); \\
 & & \text{c.c in } C &= v_2'(z_2=2b)=0; \\
 v_1(z_1) &= \frac{1}{EJ} (9pb^2z_1^2 - qb^2z_1^3); & v_1'(z_1) &= \frac{1}{EJ} (18pb^2z_1 - 3qb^2z_1^2); \\
 v_2(z_2) &= \frac{1}{EJ} (-pb^2z_2^3 + \frac{1}{8}qz_2^4 + 8pb^2z_2 - 54pb^3); & v_2'(z_2) &= \frac{1}{EJ} (-3pb^2z_2^2 + \frac{1}{2}qz_2^3 + 8pb^2); \\
 v_C &= \frac{64pb^4}{EJ} \quad (\downarrow); & \varphi_B^{(2)} &= \frac{8pb^3}{EJ} \quad (\downarrow);
 \end{aligned}$$

### Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi  $x$  e  $y$  ai vettori sforzo (piani)  $t_x$  e  $t_y$ , rispettivamente; di questi  $t_x$  è inclinato rispetto all'asse  $x$  di un angolo  $\alpha = -45^\circ$  (sicché  $\sin \alpha = -\sqrt{2}/2$ ;  $\cos \alpha = \sqrt{2}/2$ ) e ha modulo di valore  $|t_x| = 60$  MPa. L'altro vettore sforzo,  $t_y$ , è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , e la massima tensione tangenziale,  $\tau_{\max}$ .

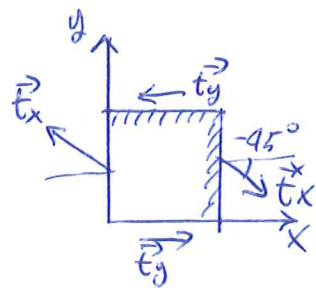
Determinare inoltre quanto vale l'angolo  $\varphi$  formato dall'asse  $x$  e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo,  $\sigma_1$ .



$$\sigma_x = 42,426 \text{ (MPa)}; \sigma_y = 0,000 \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = -42,426 \text{ (MPa)};$$

$$\sigma_1 = 68,647 \text{ (MPa)}; \sigma_2 = -26,224 \text{ (MPa)}; \tau_{\max} = 47,432 \text{ (MPa)};$$

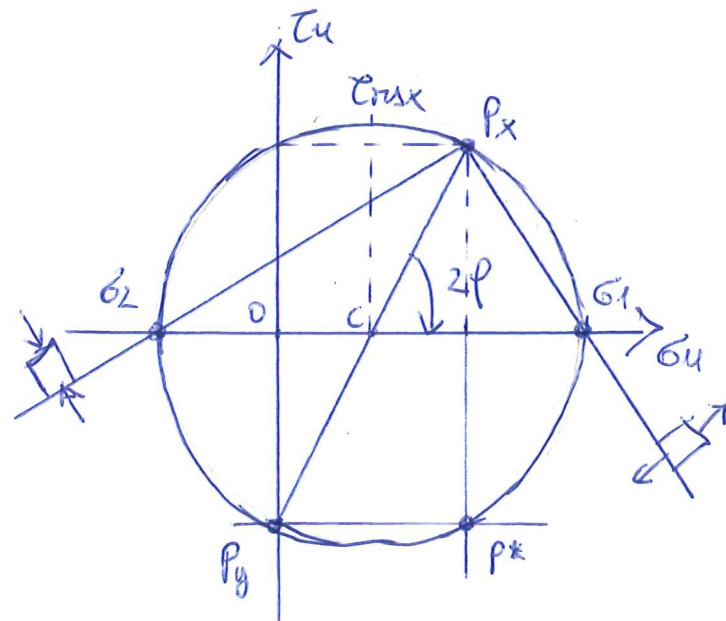
cerchio di Mohr:

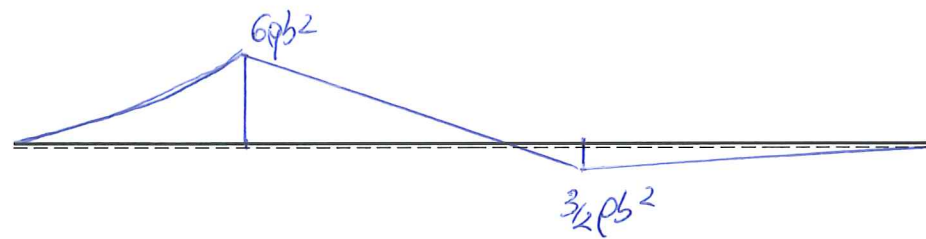
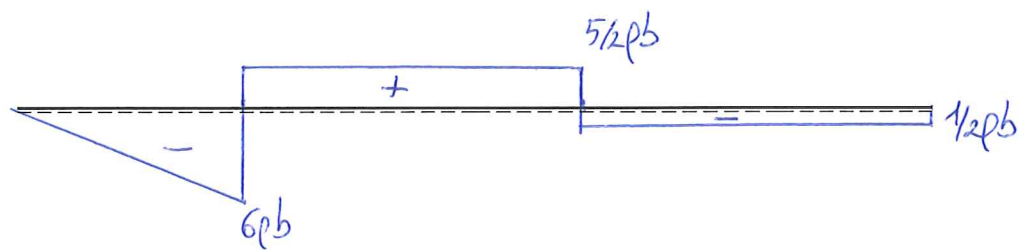
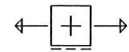
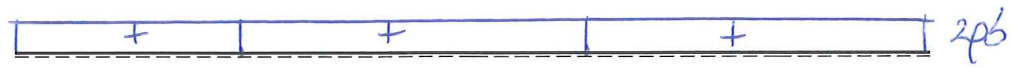


$$P_x = (42,426; +42,426)$$

$$P_y = (0,000; -42,426)$$

$$\varphi = -31,717 \text{ (}^\circ\text{)};$$





$$\begin{aligned}
 H_A (\Rightarrow) &= -2pb; & V_B (\uparrow) &= +1/2pb; & V_C (\uparrow) &= -3pb; & V_D (\uparrow) &= +1/2pb; & M_C (\curvearrowright) &= 3/2pb^2; \\
 N_{AB} &= 2pb; & T_{AB} &= -3px_1; & M_{AB} &= -3/2px_1^2; \\
 N_{BC} &= 2pb; & T_{BC} &= 5/2pb; & M_{BC} &= -6pb^2 + 5/2pbx_2; \\
 N_{DC} &= 2pb; & T_{DC} &= -1/2pb; & M_{DC} &= 1/2pbx_3; \\
 v_A &= -33pb^4/2EJ;
 \end{aligned}$$